mclass Lớp học livestream

THẦY HỒ THỨC THUẬN

KÌ THI THPT QUỐC GIA 2020
Bài thi Môn: TOÁN HỌC

SIÊU PHẨM ĐỒ THỊ 2020 PHẦN 3
LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Đáp Án	C	C	C	B	D	A	D	C	C	B
Câu	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
Đáp Án	B	D	B	A	A	A	D	B	B	B
Câu	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
Đáp Án	C	D	C	B	B	B	B	B	D	A

Câu 1.

Lời giải:

Bất phương trình $f\left(x\right)<x^3+m$ đúng với mọi $x\in\left(-1;1\right)$ khi và chỉ khi

$m>f\left(x\right)-x^3,\forall x\in\left(-1;1\right)$.

Dựa vào bảng biến thiên ta có: $f'(x)<0,\forall x\in\left(-2;1\right)$.

Suy ra: $f(x)$ nghịch biến trên $\left(-2;1\right)$ nên $f(x)$ nghịch biến trên $\left(-1;1\right)$.

Do đó: $f\left(1\right)<f\left(x\right)<f\left(-1\right)$ và $\forall x\in\left(-1;1\right)$, ta có: $-1<-x^3<1$.

$\Rightarrow f\left(1\right)-1<f\left(x\right)-x^3<f\left(-1\right)+1 \Leftrightarrow m\ge f(-1)+1$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 2.

Lời giải:

Đặt: $t = 2x - 1$, ta có phương trình trở thành $\left|f(t)\right| = 5$.

Với mỗi nghiệm t thì có một nghiệm $x = \dfrac{t+1}{2}$ nên số nghiệm t của phương trình $\left|f(t)\right| = 5$ bằng số nghiệm x của $\left|f(2x-1)\right| - 5 = 0$.

Bảng biến thiên của hàm số $y = \left|f(x)\right|$ là:

x	$-\infty$		x_0		0		1		$+\infty$
y'		$-$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty \,\Vert\, +\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

$y = 5$

Suy ra phương trình $\left|f(t)\right| = 5$ có 4 nghiệm phân biệt nên phương trình $3\left|f(2x-1)\right| - 10 = 0$ có 4 nghiệm phân biệt.

$\Rightarrow$ Chọn đáp án C.

Câu 3.

Lời giải:

Ta có: $g(x) = 7 \Leftrightarrow f\left(x - m^2\right) + n^2 = 7 \Leftrightarrow f\left(x - m^2\right) = 7 - n^2$.

Từ đồ thị của hàm số $f(x)$ ta suy ra đồ thị của hàm số $f\left(x - m^2\right)$ bằng cách tịnh tiến đồ thị của hàm số $f(x)$ theo vectơ $\vec{v} = \left(m^2; 0\right)$.

Do đó, dựa vào đồ thị của hàm số $f(x)$ ta có:

Phương trình $g(x) = 7$ có 3 nghiệm phân biệt thuộc $(0;8)$.

Khi và chỉ khi phương trình $f(x - m^2) = 7 - n^2$ có 3 nghiệm phân biệt thuộc $(0;8)$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 < m^2 < 6 \\ -4 < 7 - n^2 < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < m^2 < 6 \\ 3 < n^2 < 11 \end{cases} \xrightarrow{m,n \in \mathbb{Z}} \begin{cases} m \in \{-2; 2\} \\ n \in \{-3; -2; 2; 3\} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (m;n) \in \left\{(-2;-3);(-2;-2);(-2;2);(-2;3);(2;-3);(2;-2);(2;2);(2;3)\right\}.$$

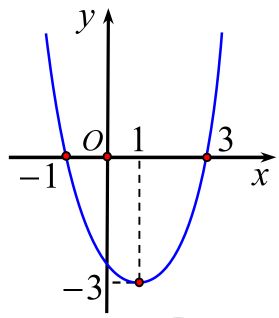
Vậy có tất cả 8 bộ $(m;n)$ thỏa yêu cầu bài toán.

$\Rightarrow$ Chọn đáp án C.

Câu 4.

Lời giải:

Từ đồ thị hàm $f'(x)$ ta có: $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3 \end{array}\right.$.



Ta có bảng xét dấu $f'(x)$:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu $f'(x)$ ta thấy:

Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ và $(3;+\infty)$. và nghịch biến trên khoảng $(-1;3)$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 5.

Lời giải:

Ta có $x\in(-1;0) \Rightarrow f(x)\in(-1;1) \Rightarrow f(f(x))\in(-3;1)$

Do đó để phương trình có nghiệm ta cần $m\in(-3;1) \Rightarrow m\in\{-2;-1;0\}$ là 3 giá trị nguyên thỏa yêu cầu bài toán.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 6.

Lời giải:

Xét hàm số $g(x)=f(x^2-4x) \Rightarrow g'(x)=(2x-4)g'(x^2-4x)$.

Xét phương trình đạo hàm: $g'(x)=(2x-4)f'(x^2-4x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-4=0 \\ f'(x^2-4x)=0 \end{array}\right.$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ \left[\begin{array}{l} x^2-4x=-4 \Leftrightarrow (x-2)^2=0 \\ x^2-4x=1 \Leftrightarrow x=2\pm\sqrt{3} \end{array}\right. \end{array}\right..$$

Suy ra hàm số $g(x)=f(x^2-4x)$ có 3 điểm cực trị trong đó có 2 điểm cực trị dương.

Suy ra hàm số $f(x^2-4|x|)=f(|x|^2-4|x|)=g(|x|)$ có thêm năm điểm cực trị.

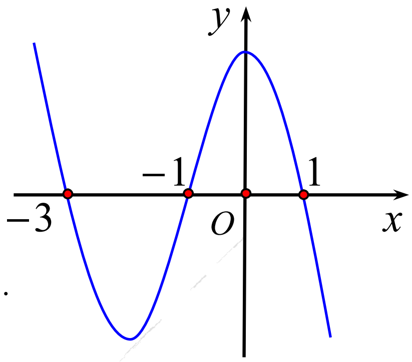
$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 7.

Lời giải:

Xét hàm $g(x)=f(1-x)$ có tập xác định $D=\mathbb{R}$. $g'(x)=\left[f(1-x)\right]'=-f'(1-x)=-f'(t)$ với $t=1-x$.

Dựa vào đồ thị:



- $f'(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-3 \\ t=-1 \\ t=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1-x=-3 \\ 1-x=-1 \\ 1-x=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=2 \\ x=0 \end{array}\right.$.
- $g'(x)<0 \Rightarrow f'(t)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t<-3 \\ -1<t<1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1-x<-3 \\ -1<1-x<1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>4 \\ 0<x<2 \end{array}\right.$.
- $g'(x)>0 \Rightarrow f'(t)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3<t<-1 \\ t>1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3<1-x<-1 \\ 1-x>1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2<x<4 \\ x<0 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu $g'(x)$:

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g'(x)=-f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Từ bảng xét dấu $g'(x)$ ta thấy hàm số $y=g(x)=f(1-x)$.

Đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;4)$; nghịch biến trên khoảng $(0;2)$ và $(4;+\infty)$.

$\Rightarrow$ Chọn đáp án D.

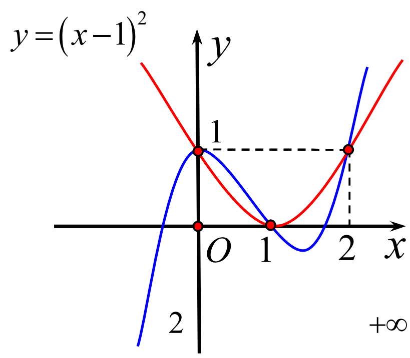
Câu 8.

Lời giải:

Ta có: $g'(x)=f'(x)-x^2+2x-1=f'(x)-(x-1)^2 \Leftrightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=(x-1)^2$ (*)

Số nghiệm của phương trình (*) là số giao điểm giữa đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và parabol $y=(x-1)^2$.

Dựa vào hình bên ta thấy giao tại 3 điểm $(0;1);(1;0);(2;1)$



$\Rightarrow (*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu $g'(x)$:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu $g'(x)$ ta thấy hàm số $y=g(x)=f(x)-\frac{x^3}{3}+x^2-x+1$.

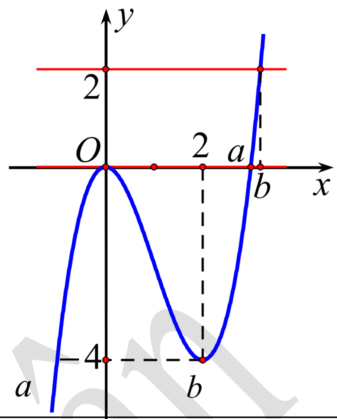
Đồng biến trên khoảng $(0;1)$ và $(2;+\infty)$; nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$ và $(1;2)$.

$\Rightarrow$ Chọn đáp án C.

Câu 9.

Lời giải:

Xét hàm số: $y=f\left[f\left(x\right)\right]$, $y'=f'\left(x\right).f'\left[f\left(x\right)\right]$.



$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'\left(x\right)=0\\ f'\left[f\left(x\right)\right]=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=2\\ f\left(x\right)=0\\ f\left(x\right)=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=2\\ x=a\in\left(2;+\infty\right)\\ x=b\in\left(a;+\infty\right)\end{array}\right..$$

Bảng xét dấu y' :

x	$-\infty$		0		2		a		b		$+\infty$
$f'\left(x\right)$		$+$	0	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$f'\left(f\left(x\right)\right)$		$+$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	
$y'=f'\left(x\right)f'\left(f\left(x\right)\right)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu vậy hàm số $y=f\left[f\left(x\right)\right]$ có bốn điểm cực trị.

$\Rightarrow$ Chọn đáp án C.

Câu 10.

Lời giải:

Xét hàm $g\left(x\right)=f\left(2-x\right)-2$ có tập xác định $D=\mathbb{R}$.

$g'\left(x\right)=\left[f\left(2-x\right)-2\right]'=-f'\left(2-x\right)=-f'\left(t\right)$ với $t=2-x$.

Dựa vào bảng biến thiên:

- $f'\left(t\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\ t=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2-x=0\\ 2-x=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\ x=0\end{array}\right.$.
- $f'\left(t\right)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t>2\\ t<0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2-x>2\\ 2-x<0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<0\\ x>2\end{array}\right.$.
- $f'\left(t\right)<0\Leftrightarrow 0<t<2\Leftrightarrow 0<2-x<2\Leftrightarrow 0<x<2$.

Bảng xét dấu $g'\left(x\right)$:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'\left(t\right)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g'\left(x\right)=-f'\left(t\right)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Từ bảng xét dấu $g'\left(x\right)$ ta thấy hàm số $y=g\left(x\right)=f\left(2-x\right)-2$.

Hàm số đạt cực đại tại $x=2$ và cực tiểu tại $x=0$.

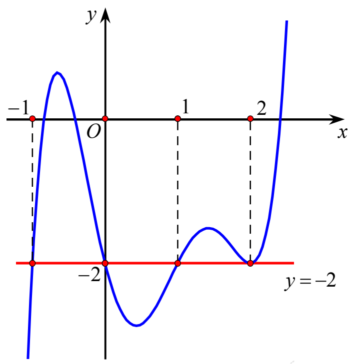
$\Rightarrow$ Chọn đáp án B.

Câu 11.

Lời giải:

Ta có: $g'(x) = f'(x) + 2$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -2 \ (*)$.

Số nghiệm của phương trình $(*)$ là số giao điểm giữa đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và đường thẳng $y = -2$.



Dựa vào hình bên ta thấy giao tại 4 điểm $(-1;2)$; $(0;-2)$; $(1;2)$; $(2;2)$.

$$\Rightarrow (*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right. .$$

Bảng xét dấu $g'(x)$:

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu $g'(x)$ ta thấy hàm số $y = g(x) = f(x) + 2x$ có 3 điểm cực trị tại $x = -1$; $x = 0$; $x = 1$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 12.

Lời giải:

Đặt $g(x) = y = f\left(1 - \frac{x}{2}\right) + x$; $g'(x) = -\frac{1}{2} f'\left(1 - \frac{x}{2}\right) + 1$.

Đặt $t = 1 - \frac{x}{2} \Rightarrow g'(x) = -\frac{1}{2} f'(t) + 1$.

Hàm số $y = f\left(1 - \frac{x}{2}\right) + x$ nghịch biến $y' < 0 \Leftrightarrow g'(x) < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} f'(t) + 1 < 0 \Leftrightarrow f'(t) > 2$.

Dựa vào bảng xét dấu $f'(x)$:

$\Rightarrow f'(t) > 2 \Leftrightarrow 2 < t < 3 \Leftrightarrow 2 < 1 - \frac{x}{2} < 3 \Leftrightarrow 4 < 2 - x < 6 \Leftrightarrow -4 < x < -2$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

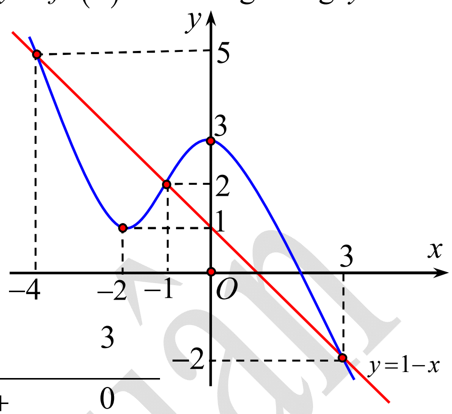
Câu 13.

Lời giải:

Ta có: $g'(x)=2f'(x)-2(1-x)$. $g'(x)=0\Leftrightarrow 2f'(x)-2(1-x)=0\Leftrightarrow f'(x)=1-x$ $(*)$.

Số nghiệm của phương trình $(*)$ là số giao điểm giữa đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và đường thẳng $y=1-x$.

Dựa vào hình bên ta thấy giao tại 3 điểm $(-4;5);(-2;3);(3;-2)$



$$\Rightarrow(*)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-4\\x=-1\\x=3\end{array}\right..$$

Bảng xét dấu $g'(x)$ trên đoạn $[-4;3]$:

x	-4		-1		3
$g'(x)$	0	$-$	0	$+$	0

Từ bảng xét dấu $g'(x)$ ta thấy hàm số $g(x)=2f(x)+(1-x)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=-1$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 14.

Lời giải:

Ta có: $y'=f'(x-2017)-2018$. $y'=0\Leftrightarrow f'(x-2017)=2018$

Ta thấy đồ thị hàm số $y=f'(x-2017)$ có được bằng cách dịch chuyển đồ thị $y=f'(x)$ qua phải 2017 đơn vị.

Nên số nghiệm của phương trình $f'(x-2017)=2018$ và $f'(x)=2018$ là bằng nhau.

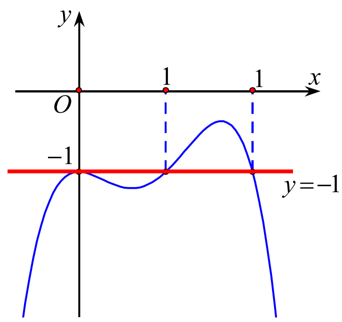
Dựa vào đồ thị $\Rightarrow f'(x-2017)=2018$ có 1 nghiệm đơn duy nhất $\Rightarrow y=f(x-2017)-2018x+2019$ có 1 điểm cực trị.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 15.

Lời giải:

Ta có: $g'(x)=f'(x)+1=0\Leftrightarrow f'(x)=-1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=2\end{array}\right..$



Bảng xét dấu: $y=g(x)$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Từ bảng xét dấu hàm số $y=g(x)$ đạt cực tiểu tại $x_{CT}=1$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 16.

Lời giải:

Ta có: $y' = 2xf'\left(x^2\right)$; $f'\left(x^2\right) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Ta có: $f'\left(x^2\right) > 0 \Leftrightarrow x^2 > 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 1 \\ x < -1 \end{array}\right.$.

$f'\left(x^2\right) < 0 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$

Bảng xét dấu y' *:*

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$2x$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$f'\left(x^2\right)$		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
$g'(x) = -f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấy vậy hàm số nghịch biến trên $(0;1)$.

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án A.**

Câu 17.

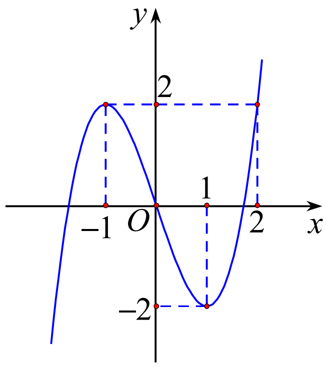
Lời giải:

Đặt $\cos x = t$, do $x \in \left[\frac{\pi}{2};\pi\right)$ nên $\cos x \in (-1;0]$ hay $t \in (-1;0]$.

Với $t \in (-1;0]$ thì $f(\cos x) = f(t) \in [0;2) \Rightarrow u = \sqrt{2f(\cos x)} = \sqrt{2f(t)} \in [0;2)$.

Khi đó phương trình $f\left(\sqrt{2f(\cos x)}\right) = m$ trở thành $f(u) = m$, $u \in [0;2)$.

Phương trình $f\left(\sqrt{2f(\cos x)}\right) = m$ có nghiệm khi và chỉ khi phương trình $f(u) = m$ có nghiệm $u \in [0;2)$.



Từ đồ thị ta có với $u \in [0;2)$ thì $f(u) \in [-2;2) \Rightarrow -2 \le m < 2$.

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-2;-1;0;1\}$ $\Rightarrow$ có 4 giá trị nguyên của m.

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án D.**

Câu 18.

Lời giải:

Từ giả thiết ta có $f'(x)=(x^2-4x+3)(-x^2-x+2)=(x-1)^2(x-3)(-x-2)$;

$\Rightarrow f'(x)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-2 \\ x>3 \end{array}\right.$ và $f'(x)<0 \Leftrightarrow -2<x<3$ (*)

Ta có $g'(x)=(2x+2)f'(x^2+2x)$.

Từ (*) suy ra $f'(x^2+2x)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+2x>3 \\ x^2+2x<-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-3 \\ x>1 \end{array}\right.$ và $f'(x^2+2x)<0 \Leftrightarrow -3<x<1$.

Ta có $g'(x)=(2x+2)f'(x^2+2x)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x+2>0 \\ f'(x^2+2x)<0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x+2<0 \\ f'(x^2+2x)>0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>-1 \\ -3<x<1 \end{cases} \\ \begin{cases} x<-1 \\ \left[\begin{array}{l} x>1 \\ x<-3 \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1<x<1 \\ x<-3 \end{array}\right.$.

Vậy hàm số $g(x)=f(x^2+2x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-1;1)$ và $(-\infty;-3)$. Suy ra $g(x)=f(x^2+2x)$ nghịch biến trên $(0;1)$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 19.

Lời giải:

Ta có $|f(1-2x)+2|=5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(1-2x)+2=5 \\ f(1-2x)+2=-5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} f(1-2x)=3 & (2) \\ f(1-2x)=-7 & (3) \end{array}\right.$

Đặt $1-2x=t$, với mỗi $x\in\mathbb{R}$ có 1 và chỉ 1 giá trị $t\in\mathbb{R}$

Đồ thị của hàm số $y=f(t)$ cũng là đồ thị của hàm số $y=f(x)$.

Số nghiệm của phương trình (2) là số hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(t)$ với đường thẳng $y=3$.

Có 3 giao điểm nên phương trình (2) có 3 nghiệm phân biệt.

Số nghiệm của phương trình (3) là số hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(t)$ với đường thẳng $y=-7$. Có 1 giao điểm nên phương trình (3) có đúng 1 nghiệm.

Nghiệm của phương trình (3) không trùng với nghiệm của phương trình (2)

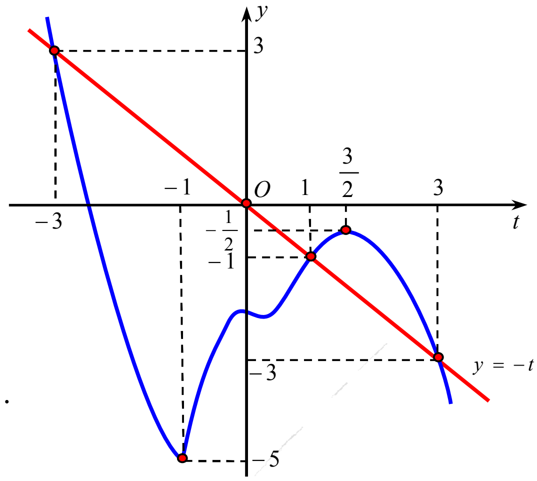
Vậy, phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 20.

Lời giải:

Xét hàm số $y=g(x)=f(1-x)+\dfrac{x^2}{2}-x$.



Ta có: $g'(x)=-f'(1-x)+x-1=-f'(1-x)-(1-x)$.

Đặt $t=1-x \Rightarrow g'(x)=-f'(t)-t$.

$g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(t)=-t$.

Số nghiệm của phương trình $(*)$ là số giao điểm giữa đồ thị hàm số $y=f'(t)$ và đường thẳng $y=-t$.

Dựa vào hình bên ta thấy giao tại 3 điểm $(-3;3);(1;-1);(3;-3)$.

$$\Leftrightarrow f'(t)=-t \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-3 \\ t=1 \\ t=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1-x=-3 \\ 1-x=1 \\ 1-x=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=0 \\ x=-2 \end{array}\right. .$$

Ta có: $g'(x)>0 \Leftrightarrow -f'(t)-t>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3<t<1 \\ t>3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3<1-x<1 \\ 1-x>3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<x<4 \\ x<-2 \end{array}\right.$.

$g'(x)<0 \Leftrightarrow -f'(t)-t<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t<-3 \\ 1<t<3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1-x<-3 \\ 1<1-x<3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>4 \\ -2<x<0 \end{array}\right.$.

Ta có bảng xét dấu $g'(x)$:

x	$-\infty$		-2		0		4		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Do đó Hàm số $y=f(1-x)+\dfrac{x^2}{2}-x$ nghịch biến trên khoảng $(-2;0)$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 21.

Lời giải:

Điều kiện xác định: $0\le x\le \dfrac{2}{3}$

Đặt $t=3-4\sqrt{6x-9x^2}$, $\left(0\le x\le \dfrac{2}{3}\right)$; $t'(x)=\dfrac{4(9x-3)}{\sqrt{6x-9x^2}}$; $t'(x)=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{3}$.

Ta có bảng biến thiên:

x	0		$\frac{1}{3}$		2
$t'(x)$		$-$	0	$+$	
$t(x)$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3

Từ bảng biến thiên ta có:Khi $x \in \left[0;\frac{2}{3}\right] \Rightarrow t \in [-1;3]$

Phương trình $f\left(3-4\sqrt{6x-9x^2}\right)+1+m^2=0 \Leftrightarrow f(t)=-1-m^2 \quad (1)$

Để phương trình đã cho có nghiệm thì phương trình (1) phải có nghiệm trên đoạn $[-1;3]$.

Từ đồ thị ta thấy: phương trình (1) có nghiệm trên đoạn $[-1;3] \Rightarrow f(t) \in \left[-5;-\frac{1}{2}\right]$

$\Leftrightarrow -5 \le -1-m^2 \le -\frac{1}{2} \Leftrightarrow m^2 \le 4 \Leftrightarrow -2 \le m \le 2$.

Vì m nhận giá trị nguyên nên $m \in \{-2;-1;0;1;2\}$.

Vậy có 5 giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có nghiệm.

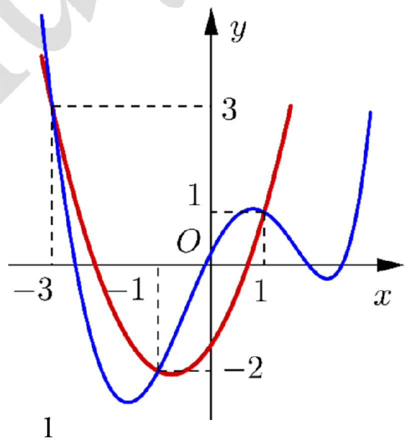
$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 22.

Lời giải:

Ta có: $g'(x)=f'(x)-x^2-\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}=f'(x)-\left(x^2+\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}\right)$

$\Rightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=x^2+\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}$



Ta vẽ đồ thị hàm số $y=x^2+\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}$. Dựa nào đồ thị $\Rightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=-1 \\ x=1 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	-3		-1		1
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0
$g(x)$	$g(-3)$	$\searrow$	$g(-1)$	$\nearrow$	$g(1)$

Từ bảng biến thiên ta suy ra $\min\limits_{x\in[-3,1]} g(x)=g(-1)$

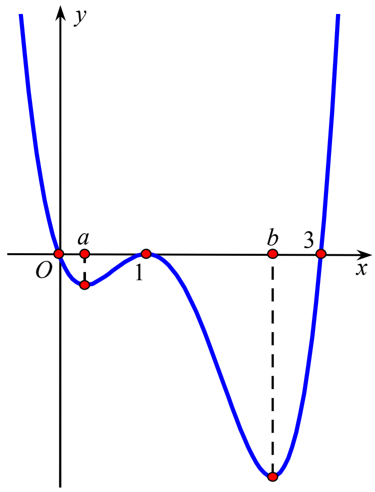
$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 23.

Lời giải:

Ta có: $g'(x)=2f(x)f'(x); g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=0 \\ f'(x)=0 \end{array}\right.$.

Mặt khác: $f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$ và $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a\ (0<a<1) \\ x=1 \\ x=b\ (1<b<3) \end{array}\right.$.



Bảng xét dấu $g'(x)$:

x	$-\infty$		0		a		1		b		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	|	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	|	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$--$	|	$-$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng biến thiên hàm số $g(x)=\left[f(x)\right]^2$ có 3 điểm cực tiểu và 2 điểm cực đại.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 24.

Lời giải:

Xét hàm số: $y=g(x)=f(3x+1)-x^3+3x$

Ta có: $g'(x)=3f'(3x+1)-3x^2+3$.

Hàm số đồng biến nên $g'(x)>0 \Leftrightarrow f'(3x+1)-(x^2-1)>0 \Leftrightarrow f'(3x+1)>x^2-1\ (1)$.

Bất phương trình (1) luôn đúng trên tập các giá trị x thỏa mãn: $\left\{\begin{array}{l} f'(3x+1)\ge 0 \\ x^2-1<0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} 1\le 3x+1\le 3 \\ 3x+1\ge 4 \end{array}\right. \\ -1<x<1 \end{array}\right.$

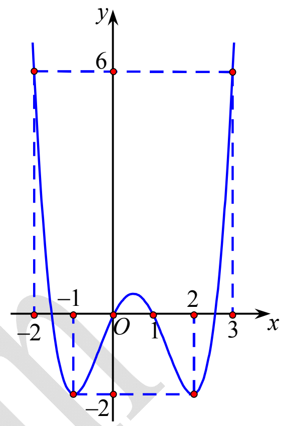
$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} 0\le x\le \dfrac{2}{3} \\ x\ge 1 \end{array}\right. \\ -1<x<1 \end{array}\right. \Leftrightarrow 0\le x\le \dfrac{2}{3}$.

Như vậy, $g(x)$ đồng biến trên $\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{3}\right)$, do $\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{3}\right)\subset\left(0;\dfrac{2}{3}\right)$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 25.

Lời giải:



Xét hàm số $g(x)=x^3-3x$ trên đoạn $[-1;2]$

Ta có: $g'(x)=3x^2-3=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$. Mặt khác: $g(-1)=2; g(1)=-2; g(1)=2$.

Bảng biến thiên hàm $y=g(x)$:

x	-1		1		2
y'		$-$	0	$+$	0
y	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2

Dựa vào BBT $-2 \le g(x) \le 2$. Đặt $t=x^3-3x$. Với $x\in[-1;2]$ thì $t\in[-2;2]$.

+) Với $t=-2$ thì có một giá trị của $x=1\in[-1;2]$.

+) Với mỗi giá trị $t\in(-2;2]$ thì tương tứng có hai giá trị của $x\in[-1;2]$.

Phương trình $f(x^3-3x)=m$ trở thành $f(t)=m$ với $t\in[-2;2]$.

Từ đồ thị suy ra $f(t)\in[-2;6]$ nên để phương trình $f(t)=m$ có nghiệm thì $m\in[-2;6]$.

Nên ta xét các trường hợp:

$m=-2$ thì $t=-1; t=2$ nên phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt.

$m=-1$ thì $t=a; t=b; t=c$ với $-2<a<-1<b<0<c<2$ nên phương trình đã cho có sáu nghiệm phân biệt.

$m=0$ thì $t=a; t=0; t=1$ với $-2<a<-1$ nên phương trình đã cho có sáu nghiệm phân biệt.

$m\in\{1;2;3;4;5\}$ thì $t=a$ với $-2<a<-1$ nên phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt.

$m=6$ thì $t=-2$ nên phương trình đã cho có một nghiệm.

Từ đó suy ra có hai giá trị của m thỏa mãn.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 26.

Lời giải:

Ta có: $g(x)=f(2x)+\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}$. Đặt $t=2x$. Với $x\in[-1;1]$ thì $t\in[-2;2]$.

Khi đó: $h(t)=f(t)+\frac{1}{2}\cos t-\frac{1}{2} \Rightarrow h'(t)=f'(t)-\frac{1}{2}\sin t$.

Từ bảng biến thiên ta thấy:

+) Với $t\in(-2;0)$ thì $f'(t)>0$ và $\sin t<0 \Rightarrow h'(t)>0$.

+) Với $t\in(0;2)$ thì $f'(t)<0$ và $\sin t>0 \Rightarrow h'(t)<0$.

+) Với $t=0$ thì $f'(t)=0$

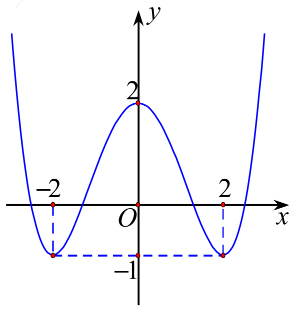
Từ đó ta có bảng biến thiên:

t	-2		0		2
$h'(t)$		$+$	0	$-$	
$h(t)$	$h(-2)$	$\nearrow$	$h(0)$	$\searrow$	$h(2)$

Vậy $\max\limits_{[-1;1]} g(x) = \max\limits_{[-2;2]} h(t) = h(0) = f(0)$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 27.



Lời giải:

Ta có $y = f(f(x)) \Rightarrow y' = f'(f(x)).f'(x) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ f'(f(x))=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=0 \\ x=2 \end{array}\right. \\ f(x)=-2 \\ f(x)=0 \\ f(x)=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=0 \\ x=2 \end{array}\right. \\ f(x)=-2 \\ f(x)=0 \\ f(x)=2 \end{array}\right..$$

Xét các phương trình:

\+ $f(x) = -2$, phương trình này vô nghiệm.

$$+ f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a\in(-3;-2) \\ x=b\in(-2;-1) \\ x=c\in(1;2) \\ x=d\in(2;3) \end{array}\right..$$

$+ f(x)=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\alpha<a \\ x=0 \\ x=\beta>d \end{array}\right.$, trong đó $x=0$ là nghiệm kép.

Vậy phương trình $y'=0$ có tổng cộng 9 nghiệm đơn phân biệt nên có 9 điểm cực trị.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 28.

Lời giải:

Đặt $t=\dfrac{5x+9}{x+3}$, khi đó với $x\in\left[-2;-1\right]$ thì $t\in\left[-1;2\right]$

(vì hàm $f\left(x\right)=\dfrac{5x+9}{x+3}$ đồng biến $x\in\left[-2;-1\right]$)

Do đó $f\left(\dfrac{5x+9}{x+3}\right)\ge m$ có nghiệm với mọi $x\in\left[-2;-1\right]$ tương đương với $f\left(t\right)\ge m$ có nghiệm với mọi $t\in\left[-1;2\right]$. Điều này tương đương với $\min\limits_{\left[-1;2\right]} f\left(t\right)\ge m$.

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy $\min\limits_{\left[-1;2\right]} f\left(t\right)=-6$ nên $m\le -6$.

Vậy các giá trị nguyên trên đoạn $\left[-10;10\right]$ thỏa yêu cầu bài toán là $\left\{-10;-9;-8;-7;-6\right\}$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 29.

Lời giải:

Ta có: $f\left(x\right)<m-x^3-x\Leftrightarrow f\left(x\right)+x^3+x<m$.

Xét hàm số $g\left(x\right)=f\left(x\right)+x^3+x$ trên $x\in\left(-2;0\right)$.

Khi đó: $g'\left(x\right)=f'\left(x\right)+3x^2+1$

Từ đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ ta thấy trên khoảng $\left(-2;0\right)$ thì $f'\left(x\right)\ge -1$

$\Rightarrow\left[f'\left(x\right)+1\right]+3x^2\ge 0\Leftrightarrow g'\left(x\right)\ge 0$ trên khoảng $\left(-2;0\right)$.

Do đó hàm số $y=g\left(x\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(-2;0\right)$.

Bảng biến thiên:

x	-2		0
$g'\left(x\right)$		$+$	
$g\left(x\right)$		$\nearrow$	

Mà $m>f\left(x\right)+x^3+x$ nghiệm đúng với mọi $x\in\left(-2;0\right)\Leftrightarrow m\ge g\left(0\right)=f\left(0\right)$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 30.

Lời giải:

Đặt $t=2\cos x$, $t\in[-2;2]$ thì $2f(2\cos x)-9=0$ trở thành $2f(t)-9=0\Leftrightarrow f(t)=\frac{9}{2}$ (1).

Nhận xét: Số nghiệm của phương trình là (1) số giao điểm của hai đồ thị: $(C):y=f(t)$ và đường thẳng $(d):y=\frac{9}{2}$.

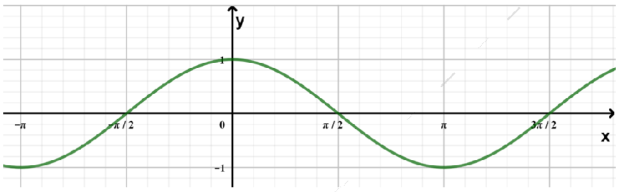
Bảng biến thiên hàm số $y=f(t)$ trên đoạn $[-2;2]$:

t	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
f'(t)		+	0	-	0	+	0	-	
f(t)	$-\infty$	↗	5	↘	4	↗	5	↘	$-\infty$

$y=\frac{9}{2}$

Dựa vào bảng biến thiên, số nghiệm $t\in[-2;2]$ của (2) là 2 nghiệm phân biệt $t_1\in(-2;0)$, $t_2\in(0;2)$.

Ta có đồ thị hàm số $y=\cos x$ trên $\left[-\pi;\frac{3\pi}{2}\right]$:



Với $t_1\in(-2;0)\Rightarrow 2\cos x=t_1\in(-2;0)$.

$\Rightarrow \cos x=\frac{t_1}{2}\in(-1;0)$

Dựa vào đồ thị hàm số $y=\cos x$ trên $\left[-\pi;\frac{3\pi}{2}\right]$ ta thấy phương trình $\cos x=\frac{t_1}{2}\in(-1;0)$ có 3 nghiệm phân biệt: $-\pi<x_1<-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{2}<x_2<\pi<x_3<\frac{3\pi}{2}$ T (1) có 3 nghiệm $x\in\left[-\pi;\frac{3\pi}{2}\right]$.

Với $t_2\in(0;2)\Rightarrow 2\cos x=t_2\in(0;2)$.

$\Rightarrow \cos x=\frac{t_2}{2}\in(0;1)$

Dựa vào đồ thị hàm số $y=\cos x$ trên $\left[-\pi;\frac{3\pi}{2}\right]$ ta thấy phương trình $\cos x=\frac{t_2}{2}\in(0;1)$ có 2 nghiệm phân biệt $-\frac{\pi}{2}<x_4<0<x_5<\frac{\pi}{2}$.

Vậy số nghiệm thuộc đoạn $\left[-\pi;\frac{3\pi}{2}\right]$ của phương trình $2f(2\cos x)-9=0$ là $2+3=5$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***