mclass Lớp học livestream

THẦY HỒ THỨC THUẬN

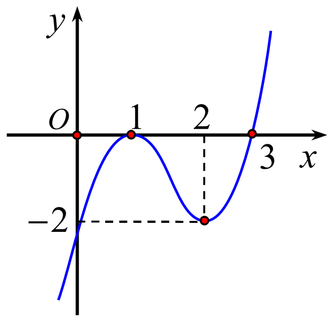
KÌ THI THPT QUỐC GIA 2020
Bài thi Môn: TOÁN HỌC

SIÊU PHẨM ĐỒ THỊ 2020 PHẦN 4
LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Đáp Án	C	A	D	B	A	D	C	D	C	D
Câu	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Đáp Án	B	B	A	C	C	D	A	B	C	A
Câu	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Đáp Án	A	C	C	C	B	B	A	D	A	C

Câu 1.

Lời giải:



Từ đồ thị hàm $f'(x)$ ta có: $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Ta có bảng xét dấu $f'(x)$:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu $f'(x)$ ta thấy hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-\infty;3)$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 2.

Lời giải:

Đặt $t=2\sin x+1$ do. $x\in\left[0;\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow t\in[1;2)$.

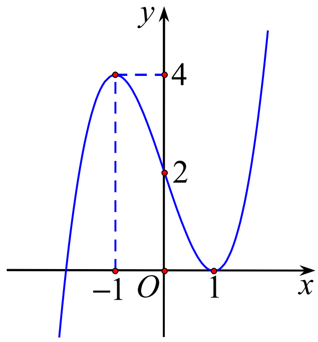
Hàm số $y=f(t)$ trên $t\in[1;2) \Rightarrow f(t)\in[-2;0)$

Ta có: $f(t)=m$ có nghiệm trên $[1;2)$ khi $m\in(-2;0]$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 3.

Lời giải:



Ta có $g'(x)=f'(f(x))f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ f(x)=1 \\ f(x)=-1 \end{array}\right.$.

Phương trình $f'(x)=0$ có hai nghiệm là $1;-1$

Phương trình $f(x)=1$ có 3 nghiệm phân biệt khác $1;-1$.

Phương trình $f(x)=-1$ có một nghiệm duy nhất khác các nghiệm ở trên.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 4.

Lời giải:

Dựa vào đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ: Ta có: $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu $f'(x)$:

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$+$	

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy đồ thị hàm số $f(x)$ có 1 điểm cực trị tại $x=-1$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 5.

Lời giải:

Đặt: $t=1-3x$, ta có phương trình trở thành $|f(t)+1|=3$.

Với mỗi nghiệm t thì có một nghiệm $x=\dfrac{1-t}{3}$ nên số nghiệm t của phương trình $|f(t)+1|=3$ bằng số nghiệm x của $|f(1-3x)+1|=3$. Bảng biến thiên của hàm số $y=|f(t)+1|$ là:

x	$-\infty$		x_1		-1		x_2		3		x_3		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$					
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	6	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$y=3$

Suy ra phương trình $|f(t)+1|=3$ có 4 nghiệm phân biệt nên phương trình $|f(1-3x)+1|=3$ có 4 nghiệm phân biệt.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 6.

Lời giải:

Đặt $t = 2\cos x - 1,\ \left(t \in [-3;1]\right)$.

Phương trình (1) trở thành:

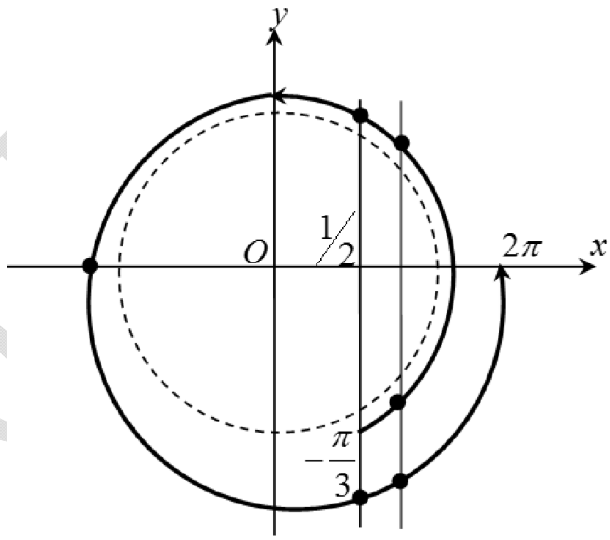
$$\left|f(t)\right| = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(t) = 2 \\ f(t) = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = t_1 < -3\ (l) \\ t = t_2 > 1\quad (l) \\ t = -3 \\ t = t_4 \in (0;1) \\ t = t_5 > 1\quad (l) \end{array}\right..$$

$t = 0 \Leftrightarrow \cos x = \dfrac{1}{2}$.

$t = -3 \Leftrightarrow \cos x = -1$.

$t = t_4 \in (0;1) \Leftrightarrow \cos x = \dfrac{t_4 + 1}{2} \in \left(\dfrac{1}{2};1\right)$.

Dựa vào vòng tròn lượng giác ta được phương trình (1) có 6 nghiệm thuộc $\left(-\dfrac{\pi}{3};2\pi\right)$.



$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 7.

Lời giải:

Ta có: $f\left(4x-x^2\right)-2=0 \Leftrightarrow f\left(4x-x^2\right)=2 \Leftrightarrow 4x-x^2=k$ (với $k_1<0$, $0<k_2<4$, $k_3>4$).

Khi đó: $x^2-4x+k=0$. Xét $\Delta'=4-k$.

Với $k_1<0$ thì $\Delta'>0$ hay phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

Với $0<k_2<4$ thì $\Delta'>0$ hay phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

Với $k_3>4$ thì $\Delta'<0$ nên phương trình vô nghiệm.

Vậy phương trình $f\left(4x-x^2\right)-2=0$ có tổng 4 nghiệm phân biệt.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Câu 8.

Lời giải:

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

Hàm số $g(x)=f(x)-x$.

Ta có: $g'(x)=f'(x)-1$; $g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=1$ (1).

Số nghiệm phương trình (1) là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và đường thẳng $y=1$

Dựa vào bảng biế nthiên, suy ra phương trình (1) có 2 nghiệm.

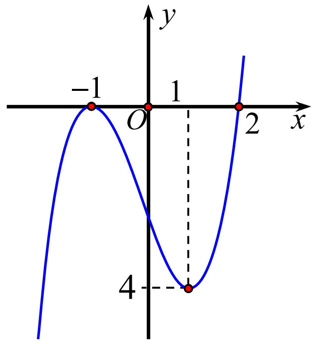
Trong đó có 1 nghiệm $x=-1$ (nghiệm kép) và $x=x_1>1$ (nghiệm đơn).

Vậy hàm số $g(x)$ đã cho có 1 điểm cực trị.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 9.

Lời giải:



Xét hàm $g(x)=f(x^2-2)$ có tập xác định $D=\mathbb{R}$.

$g'(x)=\left[f(x^2-2)\right]'=2xf'(x^2-2)=2x.f'(t)$ với $t=x^2-2$.

Dựa vào đồ thị:

➢ $f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\\t=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-2=-1\\x^2-2=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm1\\x=\pm2\end{array}\right.$.

➢ $f'(t)>0\Leftrightarrow t>2\Leftrightarrow x^2-2>2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>2\\x<-2\end{array}\right.$.

➢ $f'(t)<0\Leftrightarrow t<2\Leftrightarrow x^2-2<2\Leftrightarrow -2<x<2$.

Bảng xét dấu $g'(x)$:

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$2x$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$-$	|	$-$	0	$-$	0	$+$	
$g'(x)=2x.f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu $g'(x)$ ta thấy hàm số $y=g(x)=f(x^2-2)$.

Đồng biến trên khoảng $(-2;0)$ và $(2;+\infty)$; nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$ và $(0;2)$.

⇒ Chọn đáp án C.

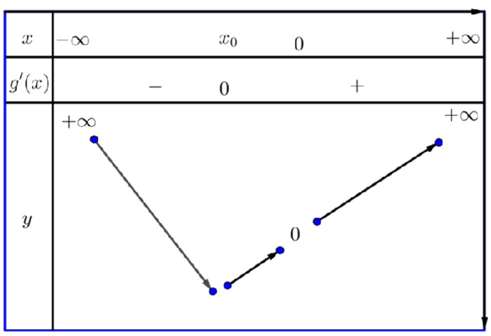
Câu 10.

Lời giải:

Theo đồ thị, $f(x)>0,\forall x\in(0;+\infty)$

$h(x)=f(x^2)-2x$; $h'(x)=0\Leftrightarrow 2x.f(x^2)-2=2\left(x.f'(x^2)-1\right)=0$

Ta có: $\begin{cases}h'(0)=-2<0\\h'(1)>0\end{cases}\Rightarrow h'(0).h'(1)<0$ nên phương trình có một nghiệm trong $(0;1)$. Lập bảng biến thiên



Lập phương trình giao điểm của $h(x)$ với trục hoành: $h(x)=0$ có 2 nghiệm phân biệt

Vậy số cực trị của $|h(x)|$ là 3 cực trị.

⇒ Chọn đáp án D.

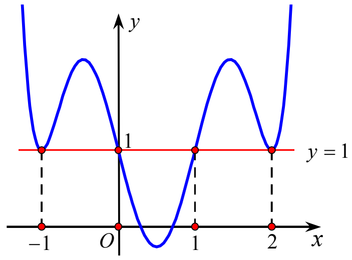
Câu 11.

Lời giải:

Ta có: $g'(x)=f'(x)-1$; $g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=1\,(*)$.

Số nghiệm của phương trình $(*)$ là số giao điểm giữa đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và đường thẳng $y=1$.

Dựa vào hình bên ta thấy giao tại 4 điểm $(-1;1)$; $(0;1)$; $(1;1)$; $(2;1)$.



$$\Rightarrow (*)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1\\ x=0\\ x=1\\ x=2\end{array}\right..$$

Bảng xét dấu $g'(x)$:

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu $g'(x)$ ta thấy hàm số $y=g(x)=f(x)-x$ có 2 điểm cực trị tại $x=0$; $x=1$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 12.

Lời giải:

Ta có $y=f\left(x^2\right)\Rightarrow y'=\left(x^2\right)'f'\left(x^2\right)$, hay $y'=2xf'\left(x^2\right)$.

Mặt khác $f'(x)=x^2(x-9)(x-4)^2$ nên $y'=2xf'\left(x^2\right)=2x.\left(x^2\right)^2\left(x^2-9\right)\left(x^2-4\right)^2$.

Do đó $y'=2x^5(x-3)(x+3)(x-2)^2(x+2)^2$.

$y'=0\Leftrightarrow x=\{0;-3;3;2;-2\}$.

Bảng xét dấu y':

x	$-\infty$		-3		-2		0		2		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu $y'\Rightarrow$ hàm số $y=f\left(x^2\right)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-3)$ và $(0;3)$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

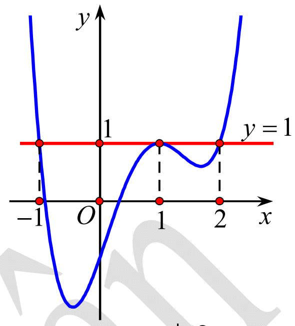
Câu 13.

Lời giải:

Ta có: $g'(x)=f'(x)-1$; $g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=1\ (*)$.

Số nghiệm của phương trình $(*)$ là số giao điểm giữa đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và đường thẳng $y=1$.

Dựa vào hình bên ta thấy giao tại 3 điểm $(-1;1);(1;1);(2;1)$



$$\Rightarrow (*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right..$$

Bảng xét dấu $g'(x)$:

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	−	0	−	0	+	

Từ bảng xét dấu $g'(x)$ ta thấy hàm số $y=g(x)=f(x)-x$.

Đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ và $(2;+\infty)$; nghịch biến trên khoảng $(-1;2)$.

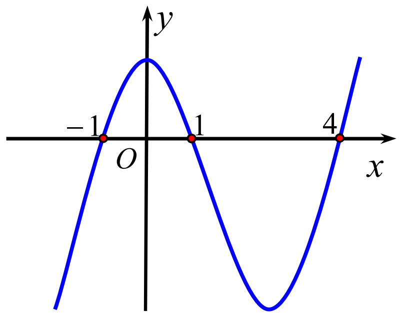
Hàm số đạt cực đại tại $x=-1$ và cực tiểu tại $x=2$ $\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 14.

Lời giải:

Xét hàm $g(x)=f(x^2)$ có tập xác định $D=\mathbb{R}$

$g'(x)=\left[f(x^2)\right]'=2xf'(x^2)=2x.f'(t)$ với $t=x^2$.



Dựa vào đồ thị:

➢ $f'(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=1 \\ t=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=-1 \\ x^2=1 \\ x^2=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 1 \\ x=\pm 2 \end{array}\right.$.

➢ $f'(t)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t>4 \\ -1<t<1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2>4 \\ -1<x^2<1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>2 \\ x<-2 \\ -1<x<1 \end{array}\right.$.

➢ $f'(t)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t<-1 \\ 1<t<4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2<-1 \\ 1<x^2<4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2>1 \\ x^2<4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x>1 \\ x<-1 \end{array}\right. \\ -2<x<2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1<x<2 \\ -2<x<-1 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu $g'(x)$:

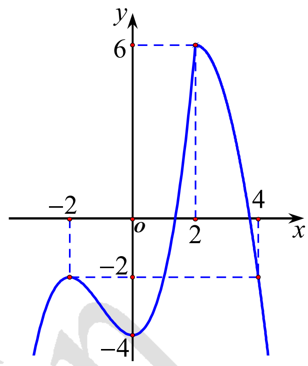
x	$-\infty$		-2		-1				1		2		$+\infty$
$2x$		−	|	−	|	−	0	+	|	+	|	+	
$f'(t)$		+	0	−	0	+	|	+	0	−	0	+	
$g'(x)=2x.f'(t)$		−	0	+	0	−	0	+	0	−	0	+	

Từ bảng xét dấu $g'(x)$ ta thấy hàm số $y = g(x) = f(x^2 - 2)$ đồng biến trên khoảng $(-2;-1);(0;1)$ và $(2;+\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$; $(-1;0)$ và $(1;2)$.

$\Rightarrow$ Chọn đáp án C.

Câu 15.

Lời giải:



Đặt $t = \frac{x}{2} + 1$, khi $-2 \le x \le 2$ thì $0 \le t \le 2$.

Phương trình đã cho trở thành $\frac{1}{3}f(t) + 2t - 2 = m \Leftrightarrow f(t) + 6t - 6 = 3m$.

Xét hàm số $g(t) = f(t) + 6t - 6$ trên đoạn $[0;2]$.

Ta có $g'(t) = f'(t) + 6$.

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$

Do đó $f'(t) > 0, \forall t \in (0;2) \Rightarrow g'(t) > 0, \forall t \in (0;2)$ và $g(0) = -10$; $g(2) = 12$.

Bảng biến thiên của hàm số $g(t)$ trên đoạn $[0;2]$

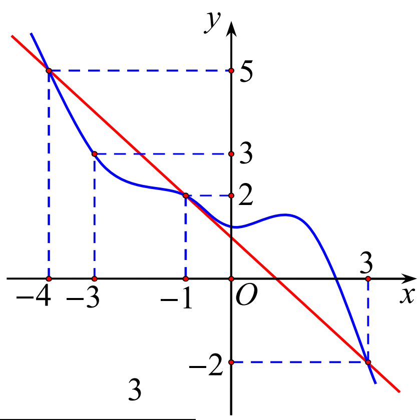
t	0		2
$g'(t)$		+	0
$g(t)$	−10	$\nearrow$	12

Phương trình đã cho có nghiệm thuộc đoạn $[-2;2]$ khi và chỉ khi phương trình $g(t) = 3m$ có nghiệm thuộc đoạn $[0;2]$ hay $-10 \le 3m \le 12$ $\Leftrightarrow -\frac{10}{3} \le m \le 4$. Mặt khác m nguyên nên $m \in \{-3;-2;-1;0;1;2;3;4\}$.

Vậy có 8 giá trị m thoả mãn bài toán. $\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 16.

Lời giải:



Ta có: $g'(x) = 2f'(x) - 2(1-x)$

Nên $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 1 - x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -1 \\ x = -4 \end{array}\right.$.

Ta có bảng xét dấu trên đoạn $[-4;3]$:

x	−4		−1		3
$g'(x)$		−	0	+	

Nên hàm số $g(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = -1$. $\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 17.

Lời giải:

Đặt: $g(x)=f\left(x^2-8x+m\right)$. Ta có $f'(x)=(x-1)^2\left(x^2-2x\right)$.

$\Rightarrow g'(x)=(2x-8)\left(x^2-8x+m-1\right)^2\left(x^2-8x+m\right)\left(x^2-8x+m-2\right)$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x=4 & \\ \left(x^2-8x+m-1\right)^2=0 & (1)\\ x^2-8x+m=0 & (2)\\ x^2-8x+m-2=0 & (3)\end{array}\right..$$

Các phương trình (1), (2), (3) không có nghiệm chung.

Ta có: $\left(x^2-8x+m-1\right)^2\geq 0$ với $\forall m\in\mathbb{R}$ nên để $g(x)$ có 5 cực trị khi và chỉ khi (2) và (3) có hai nghiệm phân biệt và khác 4.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta_2'>0\\ \Delta_3'>0\\ f_2(4)\neq 0\\ f_3(4)\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}16-m>0\\ 16-m-2>0\\ 16-32+m\neq 0\\ 16-32+m-2\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<16\\ m<18\\ m\neq 16\\ m\neq 18\end{cases}\Leftrightarrow m<16.$$

Vậy m nguyên dương và $m<16$ nên có 15 giá trị m cần tìm.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 18.

Lời giải:

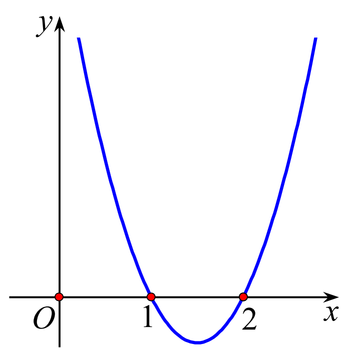
Đặt $t=\sin x-1$. Ta có $t\in[-2;0]$. Khi đó, $f(\sin x-1)=f(t)$, với $t\in[-2;0]$.

Từ bảng biến thiên ta thấy giá trị lớn nhất của hàm số $f(t)$ trên đoạn $[-2;0]$ bằng 3.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 19.

Lời giải:



Xét hàm số $y=f\left(2x-3x^2\right)$ ta có: $y'=(2-6x).f'\left(2x-3x^2\right)$.

Ta có: $f'\left(2x-3x^2\right)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-3x^2<1\\ 2x-3x^2>2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x^2-2x+1>0\\ 3x^2-2x+2<0\end{array}\right.\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$.

Mặt khác: $f'\left(2x-3x^2\right)<0\Leftrightarrow\begin{cases}2x-3x^2>1\\ 2x-3x^2<2\end{cases}$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x^2-2x+1<0\\ 3x^2-2x+2>0\end{array}\right.\Leftrightarrow x\in\varnothing$.

Do đó $f'\left(2x-3x^2\right)>0;\ \forall x\in\mathbb{R}$

Khi đó để hàm số $y=f\left(2x-3x^2\right)$ đồng biến $\Leftrightarrow y'>0\Rightarrow(2-6x).f'\left(2x-3x^2\right)>0\Leftrightarrow 2-6x>0\Leftrightarrow x<\dfrac{1}{3}$.

Vậy hàm số đồng biến trên $\left(-\infty;\dfrac{1}{3}\right)$. $\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 20.

Lời giải:

Đặt $t=\sqrt{x+1}+1 \Rightarrow t \geq 1$.

Khi đó bất phương trình $f\left(\sqrt{x+1}+1\right) \leq m$ trở thành $f(t) \leq m$ (1)

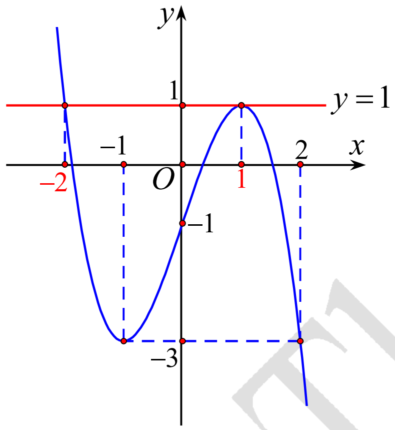
Bất phương trình $f\left(\sqrt{x+1}+1\right) \leq m$ có nghiệm khi và chỉ khi $f(t) \leq m$ (1) có nghiệm $t \geq 1$

$\Leftrightarrow m \geq \min\limits_{t \geq 1} f(t) \Leftrightarrow m \geq -4$.

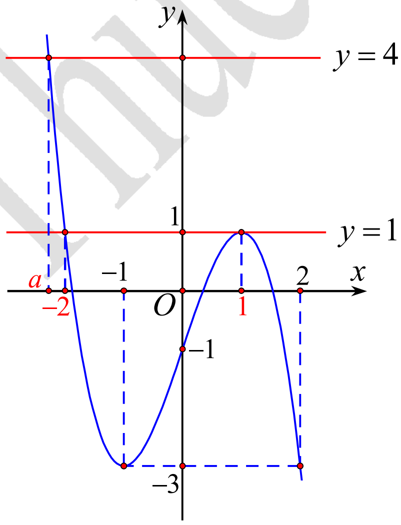
$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 21.

Lời giải:



Dựa vào đồ thị ta có $f\left(2-f(x)\right)=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2-f(x)=-2 \\ 2-f(x)=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=4 \\ f(x)=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a \\ x=-2 \\ x=1 \end{array}\right.$.



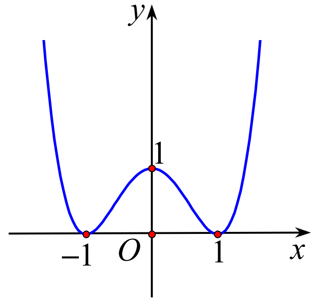
Nhận xét 3 nghiệm trên không trùng nhau nên phương trình $f\left(2-f(x)\right)=1$ có 3 nghiệm phân biệt.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 22.

Lời giải:

Đặt $y=g(x)=f(x^2-1)$. Ta có $g'(x)=2x.f'(x^2-1)$.



Cho $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f'(x^2-1)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2-1=-1 \\ x^2-1=0 \\ x^2-1=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 1 \\ x=\pm\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Dựa vào đồ thị:

$f'(x^2-1)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-1<-1 \\ 0<x^2-1<1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2<0 \\ 1<x^2<2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\sqrt{2}<x<-1 \\ 1<x<\sqrt{2} \end{array}\right.$.

$f'(x^2-1)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-1>1 \\ -1<x^2-1<0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2>2 \\ 0<x^2<1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-\sqrt{2} \\ x>\sqrt{2} \\ -1<x<0 \\ 0<x<1 \end{array}\right.$.

Suy ra bảng xét dấu của $g(x)$:

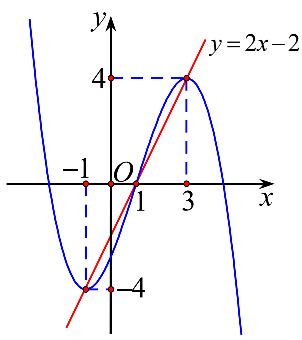
x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		-1		0		1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$2x$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$f'(x^2-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy số điểm cực trị của hàm số $y=f(x^2-1)$ là 5.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 23.

Lời giải:



Ta có: $y'=f'(x)-2x+2$; $y'=0 \Leftrightarrow f'(x)=2x-2$.

Dựa vào đồ thị hàm số $f'(x)=2x-2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu y':

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu hàm số $y=f(x)-x^2+2x$ nghịch biến trên các khoảng $(-1;1)$ và $(3;+\infty)$. Mà $(0;1)\subset(-1;1)$. $\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 24.

Lời giải:

Ta có $g'(x) = -f'(1-x) + \dfrac{-(2x+m)}{\left(x^2+mx+m^2+1\right)^2}$

Do $x \in (-3;0) \Rightarrow 1-x \in (1;4) \Rightarrow f'(1-x) < 0$ (dựa vào bảng biến thiên)

Suy ra $-f'(1-x) > 0, \forall x \in (-3;0)$

Do đó để: $g'(x) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{-2x-m}{\left(x^2+mx+m^2+1\right)^2} \ge 0 \Leftrightarrow -2x \ge m$

Do $-2x \in (0;6), \forall x \in (-3;0)$ nên $m \le 0$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 25.

Lời giải:

Đặt $t = x^2 - 2x + 1 - |x-1|$ suy ra $t'(x) = 2x - 2 - \dfrac{x-1}{|x-1|} = (x-1)\left(2 - \dfrac{1}{|x-1|}\right)$.

Suy ra $t'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)\left(2 - \dfrac{1}{|x-1|}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2} \\ x = \dfrac{3}{2} \end{array}\right.$; $t'(x)$ không xác định khi $x = 1$.

Ta có $g'(x) = t'(x).f'(t(x))$, $g'(x)$ không xác định tại $x = 1$.

$\Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t'(x) = 0 \\ f'(t(x)) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow f'(t(x)) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t(x) = -1\ (vn) \\ t(x) = 0 \\ t(x) = 1 \end{array}\right.$.

Ta có: $t(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \\ x = 1 \end{array}\right.$ và $t(x) = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \\ x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$.

Từ đó ta có bảng biến thiên của $g(x) = f\left(x^2 - 2x + 1 - |x-1|\right)$ như sau

x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		1		$\frac{3}{2}$		2		$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$t'(x)$		–	|	–	|	–	0	+	||	–	0	+	|	+	|	+	
$f'(t(x))$		+	0	–	0	+	|	+	0	+	|	+	0	–	0	+	
$g'(x)$		–	0	+	0	–	0	+	||	–	0	+	0	–	0	+	

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số $g(x) = f\left(x^2 - 2x + 1 - |x-1|\right)$ có 7 điểm cực trị.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 26.

Lời giải:

Với $x\in(1;2020)$, ta có $xf(x)>mx+2 \Leftrightarrow m<f(x)-\dfrac{2}{x}$. $(*)$

Đặt $g(x)=f(x)-\dfrac{x}{2}$, $g'(x)=f'(x)+\dfrac{2}{x^2}>0, \forall x\in(1;2020)$.

Do đó hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(1;2020)$.

Suy ra $(*)$ luôn đúng khi và chỉ khi $m\le g(1)=f(1)-2$.

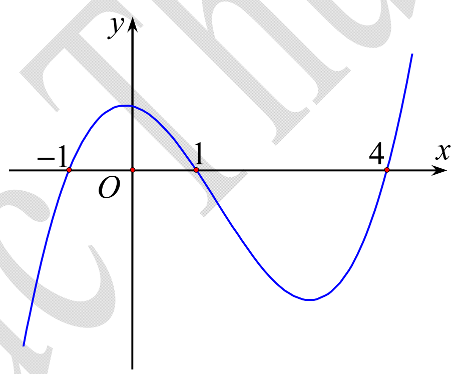
$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 27.

Lời giải:

Đặt $g(x)=f(x^2) \Rightarrow g'(x)=2x.f'(x^2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f'(x^2)=0 \end{array}\right.$.

Với $f'(x^2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=-1 \\ x^2=1 \\ x^2=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 1 \\ x=\pm 4 \end{array}\right.$.



Xét $f'(x^2)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1<x^2<1 \\ x^2>4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1<x<1 \\ x>2 \\ x<-2 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu $g'(x)$:

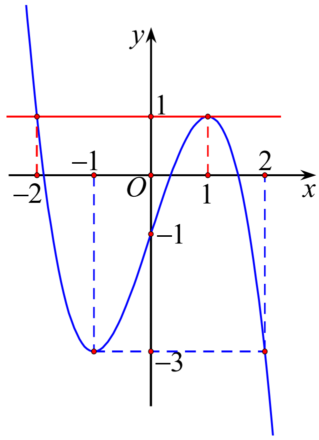
x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$2x$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$f'(x^2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu $g'(x)$ hàm số $g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$; $(-1;0)$ và $(1;2)$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 28.

Lời giải:



Ta có: $f(x)=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2 \end{array}\right.$

$\Rightarrow f\left(f(x)-m\right)=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)-m=1 \\ f(x)-m=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=m+1 \\ f(x)=m-2 \end{array}\right.$

Để phương trình $f\left(f(x)-m\right)=1$ có 5 nghiệm phân biệt
(1 phương trình 2 nghiệm, 1 phương trình 3 nghiệm):
Ta có các trường hợp sau:

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m+1=1 \\ m-2\in(-3;1) \end{cases} \\ \begin{cases} m+1=-3 \\ m-2\in(-3;1) \end{cases} \\ \begin{cases} m-2=1 \\ m+1\in(-3;1) \end{cases} \\ \begin{cases} m-2=-3 \\ m+1\in(-3;1) \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m=0 \\ -1<m<3 \end{cases} \\ \begin{cases} m=-4 \\ -1<m<3 \end{cases} \\ \begin{cases} m=3 \\ -4<m<0 \end{cases} \\ \begin{cases} m=-1 \\ -4<m<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=-1 \end{array}\right..$$

Vậy số phần tử của S bằng 2

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 29.

Lời giải:

Bất phương trình tương đương $g(x)=f(x)-\sqrt{x^2+e}<m \quad (1)$.

Ta có: $g'(x)=f'(x)-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+e}}>0 \Rightarrow \begin{cases} f'(x)\in(0;2), \forall x\in(-3;0) \\ -\dfrac{x}{\sqrt{x^2+e}}>0, \forall x\in(-3;-1) \end{cases}.$

Như vậy hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(-3;-1)$.

Khi đó (1) nghiệm đúng với mọi $x\in(-3;-1)$ khi $m\ge g(-1)=f(-1)-\sqrt{e+1}$.

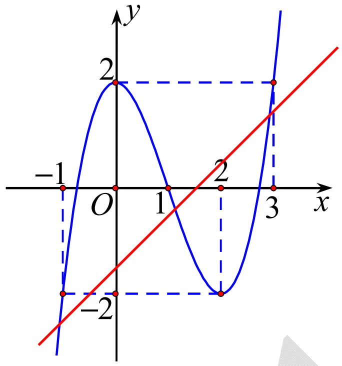
$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 30.

Lời giải:

Đặt $t = x - \frac{m}{3}$, khi đó ta có $g\left(t + \frac{m}{3}\right) = f(t) - \frac{1}{2}(t-1)^2 + m + 1$

Ta có: $g'\left(t + \frac{m}{3}\right) = f'(t) - (t-1)$; $g'\left(t + \frac{m}{3}\right) = 0 \Rightarrow f'(t) = t - 1$



Từ đồ thị ta có $g'\left(t + \frac{m}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \pm 1 \\ t = 3 \end{array}\right.$ và $g'\left(t + \frac{m}{3}\right) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 < t < 1 \\ t > 3 \end{array}\right.$.

Suy ra $g'(x) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 < x - \frac{m}{3} < 1 \\ x - \frac{m}{3} > 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 + \frac{m}{3} < x < 1 + \frac{m}{3} \\ x > 3 + \frac{m}{3} \end{array}\right.$

Để hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên $(7;8)$ khi $g'(x) > 0, \forall x \in (7;8)$.

Từ đó suy ra $\left[\begin{array}{l} -1 + \frac{m}{3} \le 7 < 8 \le 1 + \frac{m}{3} \\ 3 + \frac{m}{3} \le 7 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 21 \le m \le 24 \\ m \le 12 \end{array}\right.$.

Vì $m \in Z^+$ nên $S = \{1;2;3...12;21;22;23;24\}$. Vậy tổng các phần tử của S bằng 168.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***